Je considère $\mathbb{B} = \mathrm{Spa}(K < T^{1/p^\infty} >)$ la boule fermée perfectoïde sur K et le morphisme

$$f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

donné par $f^* T^{1/p^n} = T^{2/p^n}$ pour tout $n \geq 1$ (on suppose $p \neq 2$ si K est de caractéristique 2, si $p = 2 = car(K)$ alors f est un iso). Il est facilement localement profini i.e. les fibres géométriques sont des ensembles profinis (la fibre géométrique est triviale en l'origine et isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en dehors de l'origine). Juste une remarque avant de continuer. Lorsque $car(K) = 0$, si on veut être précis, on ne peut pas dire que « f est défini par $z \mapsto z^2$ » car on pourrait poser $f^* T^{1/p^n} = \varepsilon_n T^{2/p^n}$ avec $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p(1)$....néanmoins j'utiliserai cet abus de terminologie.

Je fixe un rayon $\rho \in]0, 1[\cap |K|$. Maintenant pour $n \geq 1$ je considère

$$U_n = \mathbb{B}(\rho^n) \amalg \Big(\coprod_{0 \leq i \leq n-1} \mathcal{C}(\rho^{i+1}, \rho^i) \Big)$$

où $\mathcal{C}(\rho_1, \rho_2)$ est la couronne fermée de rayons $\rho_1 \leq \rho_2$ et $\mathbb{B}(\rho)$ la boule fermée de rayon ρ. Bien sûr U_n est affinoïde et

$$U_n \longrightarrow \mathbb{B}$$

est étale surjectif. Les $(U_n)_n$ forment un système projectif et on peut considérer le morphisme pro-étale surjectif

$$U_\infty = \varprojlim_n U_n \longrightarrow \mathbb{B}$$

qui est un recouvrement pro-étale (c'est bien un recouvrement pro-étale car le morphisme $U_\infty \to \mathbb{B}$ est quasicompact surjectif). J'affirme maintenant que dans le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} V_\infty \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{B} \arrow[d, "f"] \\ U_\infty \arrow[r] & \mathbb{B}, \end{tikzcd}$$

qui définit V_∞, le morphisme $V_\infty \to U_\infty$ est pro-étale. Pour cela je note V_n défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{B} \arrow[d, "f"] \\ U_n \arrow[r] & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

On a bien sûr $V_\infty = \varprojlim_n V_n$ et

$$V_n = \mathbb{B}(\rho^{n/2}) \amalg \Big(\coprod_{0 \leq i \leq n-1} \mathcal{C}(\rho^{\frac{i+1}{2}}, \rho^{\frac{i}{2}}) \Big).$$

Je note maintenant

$$W_n = \mathbb{B}(\rho^n) \amalg \Big(\coprod_{0 \leq i \leq n-1} \mathcal{C}(\rho^{\frac{i+1}{2}}, \rho^{\frac{i}{2}}) \Big).$$

Je définis le morphisme

$$g_n : W_n \longrightarrow U_n$$

par les formules :

- $g_{n|\mathbb{B}(\rho^n)} = Id_{\mathbb{B}(\rho^n)}$ composé avec l'inclusion $\mathbb{B}(\rho^n) \hookrightarrow U_n$
- $g_{n|\mathcal{C}(\rho^{\frac{i+1}{2}}, \rho^{\frac{i}{2}})} = [z \mapsto z^2]$ composé avec l'inclusion $\mathcal{C}(\rho^{i+1}, \rho^i) \hookrightarrow U_n$.

Je définis les applications de transition

$$\alpha_{n+1} : W_{n+1} \longrightarrow W_n$$

par les formules :

- $\alpha_{n+1|\mathbb{B}(\rho^{n+1})} = \mathbb{B}(\rho^{n+1}) \hookrightarrow \mathbb{B}(\rho^n) \hookrightarrow W_n$
- $\alpha_{n+1|\mathcal{C}(\rho^{\frac{n+1}{2}}, \rho^{\frac{n}{2}})} = [z \mapsto z^2]$ composé avec l'inclusion $\mathcal{C}(\rho^{n+1}, \rho^n) \hookrightarrow \mathbb{B}(\rho^n) \hookrightarrow W_n$.

- $\alpha_{n+1|\mathcal{C}(\rho^{\frac{i+1}{1}},\rho^{\frac{i}{2}})} = \mathcal{C}(\rho^{\frac{i+1}{1}},\rho^{\frac{i}{2}}) \hookrightarrow W_n$ si $i<n$.

On a alors un morphisme de systèmes projectifs $(W_n)_n \to (U_n)_n$ qui nous donne un morphisme

$$W_\infty \longrightarrow U_\infty.$$

Celui-ci est pro-étale car $W_n \to U_n$ est étale.

On va maintenant montrer qu'il y a un isomorphisme

$$\begin{tikzcd} V_\infty \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & W_\infty \arrow[dl] \\ & U_\infty. & \end{tikzcd}$$

Pour cela je définis un morphisme h_n

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[rr, "h_n"] \arrow[dr] & & W_n \arrow[dl] \\ & U_n & \end{tikzcd}$$

par les formules :

- $h_{n|\mathbb{B}(\rho^{\frac{n}{2}})} = [z \mapsto z^2]$ composé avec l'inclusion $\mathbb{B}(\rho^n) \hookrightarrow W_n$
- $h_{n|\mathcal{C}(\rho^{\frac{i+1}{2}},\rho^{\frac{i}{2}})} = \mathcal{C}(\rho^{\frac{i+1}{2}},\rho^{\frac{i}{2}}) \hookrightarrow W_n$ pour $0 \le i \le n-1$.

C'est un morphisme de systèmes projectifs $(V_n) \to (W_n)$ au dessus de $(U_n)_n$ qui définit notre morphisme

$$\begin{tikzcd} V_\infty \arrow[rr, "h_\infty"] \arrow[dr] & & W_\infty \arrow[dl] \\ & U_\infty & \end{tikzcd}$$

dont j'affirme que c'est un iso. C'est un morphisme entre espaces affinoïdes perfectoïdes. De plus pour tout $L|K$ perfectoïde

$$h_\infty : V_\infty(L) \xrightarrow{\sim} W_\infty(L)$$

car h_∞ est un isomorphisme « en dehors de 0 » (l'origine de la boule) et les fibres de $V_\infty \to U_\infty$ et $W_\infty \to U_\infty$ en $0 \in U_\infty$ s'identifient à $\mathrm{Spa}(K)$. Fixons une valeur absolue sur K ce qui munie toutes nos K-algèbres perfectoïdes automatiquement de leur norme spectrale. La boule unité de R pour cette norme spectrale est R^0. Le morphisme

$$\mathcal{O}(W_\infty) \longrightarrow \mathcal{O}(V_\infty)$$

est donc isométrique. Afin de montrer que c'est un isomorphisme on doit donc montrer qu'il est d'image dense. On utilise pour cela la formule

$$\widehat{\left(\varinjlim_{n\to+\infty} \mathcal{O}(\mathbb{B}(\rho^n))^0\right)} = \mathcal{O}_K \tag{1}$$

traduction de $\varprojlim_{n\to+\infty} \mathbb{B}(\rho^n) = \mathrm{Spa}(K)$.

Soit donc une fonction dans $\mathcal{O}(V_\infty)$ et $\varepsilon > 0$. On peut l'approximer à ε près pour la norme spectrale par une fonction de $\mathcal{O}(V_n)$ avec $n \gg 0$. On a

$$\mathcal{O}(V_n) = \mathcal{O}(\mathbb{B}(\rho^{n/2})) \times \prod_{0\le i\le n-1} \mathcal{O}(\mathcal{C}(\rho^{i+1},\rho^i))$$

Quitte à agrandir n et remplacer ε par 2ε on peut supposer que la composante de l'élément de ce produit dans le facteur $\mathcal{O}(\mathbb{B}(\rho^{n/2}))$ est donné par un élément de K (cf. formule (1) précédente).

Mais puisque $z \mapsto z^2$ induit l'identité sur K notre élément de $O(V_n)$ provient d'un élément de

$$\mathcal{O}(W_n) = \mathcal{O}(\mathbb{B}(\rho^n)) \times \prod_{0 \leq i \leq n-1} \mathcal{O}(\mathcal{C}(\rho^{i+1}, \rho^i)).$$

$\square$

Voilà, on voit bien comment va marcher la preuve en général du théorème qui dit que localement quasi-profini est équivalent à pro-étale localement pour la topologie pro-étale. On va supposer que l'on a un morphisme quasi-profini $\mathrm{Spa}(R', R'^+) \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$ avec $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ w-local (en décomposant en couronnes notre disque précédent on l'a rendu ≪ partiellement w-local ≫). On va utiliser le fait que si X est perfectoïde et $x \in X$ alors les germes de revêtements étales finis au voisinage de x correspondent aux $k(x)$-algèbres étales finies :

$$\varinjlim_{U \ni x} \text{ét-fini}/U \xrightarrow{\sim} \text{ét-fini}/\mathrm{Spa}(k(x), k(x)^+)$$

(cela résulte de ce que $\mathcal{O}_{X,x}$ est hensélien) et blablabla....la preuve doit être assez difficile à rédiger mais avoir compris cet exemple est suffisant en quelques sortes, tous les ingrédients sont dedans.

Laurent Fargues, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu 75252 Paris
E-mail address: `laurent.fargues@imj-prg.fr`